

Grundlagen der Mathematischen Statistik

Kontinuierliche Verteilungen

Uwe Menzel, 2018

uwe.menzel@matstat.org

www.matstat.org

1

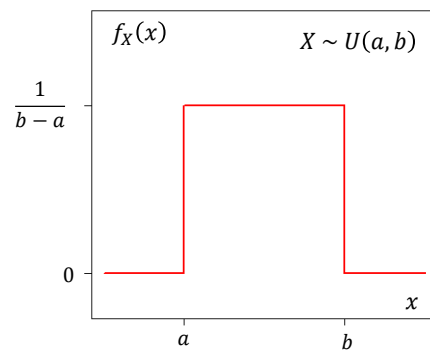
Stetige Gleichverteilung

Kurzbezeichnung: $X \sim U(a, b)$ "uniform"

Ereignisraum: $\Omega_X = (a, b)$

Dichtefunktion:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



www.matstat.org

2

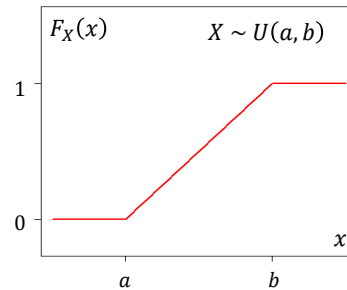
Stetige Gleichverteilung

Verteilungsfunktion:

- $F_X(x)$ muss Null sein für alle x links von a
- $F_X(x)$ muss Eins sein für alle x rechts von b
- Für $a \leq x \leq b$ gilt:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_a^x f_X(t) dt = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \left[\frac{1}{b-a} \cdot t \right]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$



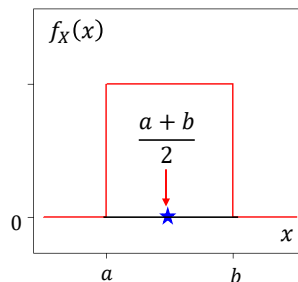
www.matstat.org

3

Stetige Gleichverteilung

Erwartungswert, Berechnung:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot x^2 \right]_a^b \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2} \cdot (b^2 - a^2) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2} \cdot (b-a) \cdot (b+a) = \underline{\underline{\frac{a+b}{2}}} \end{aligned}$$



$$\frac{a+b}{2} = \text{"Schwerpunkt"}$$

www.matstat.org

4

Stetige Gleichverteilung

Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{"Schwerpunkt"}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad \text{je größer der Abstand zwischen } a \text{ und } b, \text{ desto größer die Varianz}$$

$$D(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{|b-a|}{\sqrt{12}}$$

Beispiel für eine stetige Gleichverteilung:

Der Bus vom Flughafen Schönefeld nach Zeuthen fährt alle 30 Minuten. Ich weiß nicht, zu welcher Zeit ich aus den Flieger herauskomme → die Wartezeit auf den Bus liegt irgendwo zwischen 0 und 30, keine Zeit ist bevorzugt → die Wartezeit X ist stetig gleichverteilt: $X \sim U(0, 30)$

www.matstat.org

5

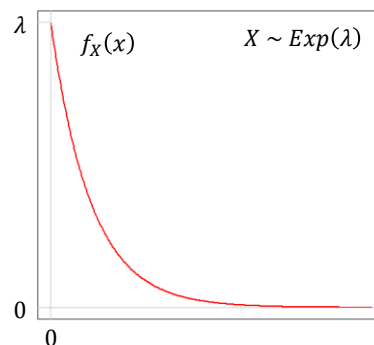
Exponentialverteilung

Kurzbezeichnung: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

Ereignisraum: $\Omega_X = (0, \infty)$

Dichtefunktion:

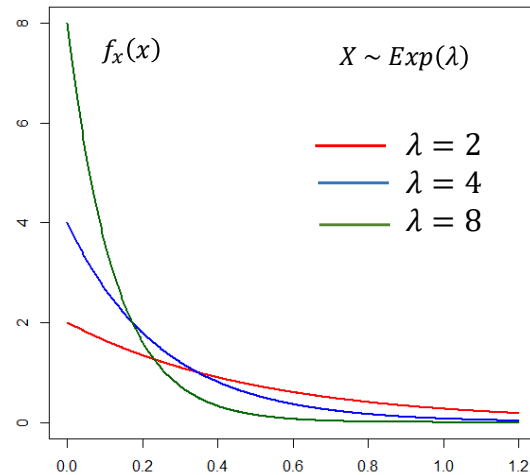
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \lambda > 0$$



6

Exponentialverteilung

Dichtefunktion



www.matstat.org

7

Exponentialverteilung

$X \sim \text{Exp}(\lambda)$

Normierung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx = \lambda \cdot \frac{1}{-\lambda} \cdot [e^{-\lambda \cdot x}]_0^{+\infty} = [e^{-\lambda \cdot x}]_0^{+\infty} = \underline{\underline{1}} \quad \checkmark$$

Verteilungsfunktion:

$$F_X(x) = 0 \quad \text{für } x < 0$$

für $x \geq 0$ gilt:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} dt = \lambda \cdot \frac{1}{-\lambda} \cdot [e^{-\lambda \cdot t}]_0^x = [e^{-\lambda \cdot t}]_0^x = \underline{\underline{1 - e^{-\lambda \cdot x}}}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \lambda > 0$$

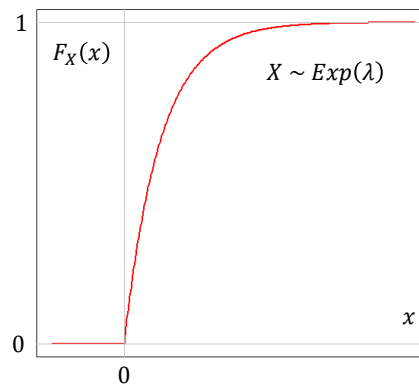
www.matstat.org

8

Exponentialverteilung

Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \lambda > 0$$



www.matstat.org

9

Exponentialverteilung

Erwartungswert, Berechnung:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \lambda \cdot \int_0^{+\infty} \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{-\lambda \cdot x}}_{v'} dx && \text{partielle Integration} \\ &= \lambda \cdot \left[\underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{-\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot x}}_v \right]_0^{+\infty} - \lambda \cdot \int_0^{+\infty} \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{1}{-\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot x}}_v dx = 0 + \int_0^{\infty} e^{-\lambda \cdot x} dx = \underline{\underline{\frac{1}{\lambda}}} \end{aligned}$$

Anmerkung:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-\lambda \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\lambda \cdot x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda \cdot e^{\lambda \cdot x}} = 0 \quad \text{L' Hospital}$$

www.matstat.org

10

Exponentialverteilung

Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad D(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Quantil: x_α

Definition für x_α (siehe F2):

$$F_X(x_\alpha) = 1 - \alpha$$

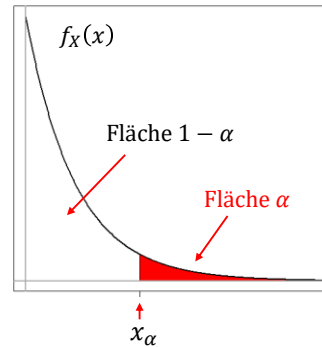
$$\Rightarrow 1 - e^{-\lambda \cdot x_\alpha} = 1 - \alpha$$

$$e^{-\lambda \cdot x_\alpha} = \alpha$$

$$-\lambda \cdot x_\alpha = \ln(\alpha)$$

$$x_\alpha = \frac{-\ln(\alpha)}{\lambda}$$

Quantildefinition:



www.matstat.org

11

Exponentialverteilung

Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung:

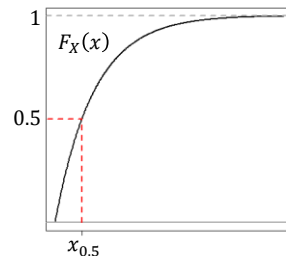
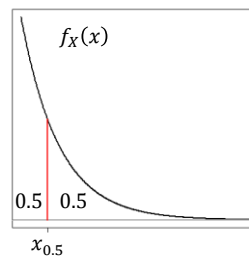
$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad D(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Median: = Quantil für $\alpha = 0.5$, also $x_{0.5}$

$$x_\alpha = \frac{-\ln(\alpha)}{\lambda}$$

$$x_{0.5} = \frac{-1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x_{0.5} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$



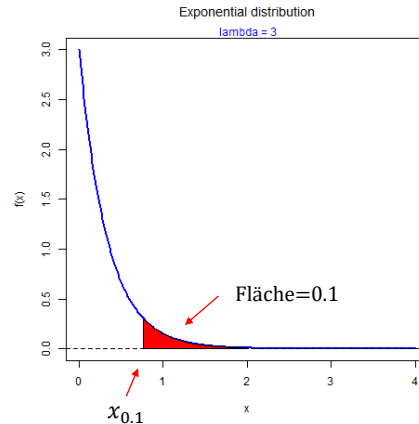
www.matstat.org

12

Exponentialverteilung

Beispiel: Eine Zufallsvariable ist exponentiell verteilt mit dem Erwartungswert $1/3$. Berechne das 0.1-Quantil. Skizziere das Resultat.

$$\begin{aligned}
 F_X(x_\alpha) &= 1 - \alpha \\
 1 - e^{-\lambda \cdot x_\alpha} &= 1 - \alpha \\
 e^{-\lambda \cdot x_\alpha} &= \alpha \\
 -\lambda \cdot x_\alpha &= \ln \alpha \\
 x_\alpha &= \frac{-\ln \alpha}{\lambda} \quad \text{mit } \lambda = 3 \\
 x_{0.1} &= \frac{-\ln 0.1}{3} = \underline{\underline{0.7675}}
 \end{aligned}$$



 `P = qexp(0.1, rate = 3, lower.tail = FALSE)`

www.matstat.org

13

Exponentialverteilung

Beispiel: Eine elektronische Komponente hat eine exponentiell verteilte Betriebsdauer mit dem Erwartungswert 2500 Stunden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Komponente länger als 4000 Stunden funktioniert?

Zufallsvariable X : Betriebsdauer $E(X) = 2500 \implies \lambda = \frac{1}{2500}$

$$\begin{aligned}
 P(X > 4000) &= 1 - P(X \leq 4000) = 1 - F_X(4000) \\
 &= 1 - \left[1 - e^{-\frac{4000}{2500}} \right] = e^{-\frac{4000}{2500}} \approx \underline{\underline{0.2}}
 \end{aligned}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass diese Komponente zwischen 2000 und 4000 Stunden funktioniert?

$$\begin{aligned}
 P(2000 < X \leq 4000) &= F_X(4000) - F_X(2000) = 1 - e^{-\frac{4000}{2500}} - \left[1 - e^{-\frac{2000}{2500}} \right] \\
 &= e^{-\frac{2000}{2500}} - e^{-\frac{4000}{2500}} \approx \underline{\underline{0.247}}
 \end{aligned}$$

 `P = pexp(4000, rate = 1/2500) - pexp(2000, rate = 1/2500) \approx \underline{\underline{0.247}}`

www.matstat.org

14

Exponentialverteilung

Beispiel:

Eine Zufallsvariable X ist exponentiell verteilt mit Erwartungswert $1/4$:

$$X \sim \text{Exp}(4)$$

a) $P(X \leq 0.5)$? $P(X \leq 0.5) = F_X(0.5) = 1 - e^{-4 \cdot 0.5} = 1 - e^{-2} = \underline{\underline{0.865}}$

b) $P(0.2 \leq X \leq 0.4)$?

$$\begin{aligned} P(0.2 \leq X \leq 0.4) &= P(0.2 < X \leq 0.4) = F_X(0.4) - F_X(0.2) \\ &= 1 - e^{-4 \cdot 0.4} - (1 - e^{-4 \cdot 0.2}) = 1 - e^{-1.6} - 1 + e^{-0.8} \\ &= e^{-0.8} - e^{-1.6} \approx \underline{\underline{0.247}} \end{aligned}$$

c) $E(X)$? $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4}$ d) $V(X)$? $V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{16}$

www.matstat.org

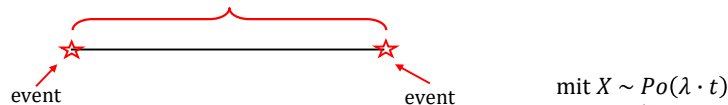
15

Exponentialverteilung

Zusammenhang mit der Poisson-Verteilung:

Angenommen, die Zufallsvariable X ist Poisson-verteilt: $X \sim \text{Po}(\lambda \cdot t)$, d.h. zufällige Ereignisse ("events") geschehen unabhängig in Zeit/Raum. Der Abstand zwischen zwei Ereignissen heißt Wartezeit ("inter-arrival time") und wird oft mit T bezeichnet. Da die Ereignisse zufällig eintreffen, ist auch T eine Zufallsvariable. Die Verteilungen dieser Zufallsvariable kann angegeben werden:

T = "inter-arrival time" = Wartezeit bis zum nächsten Ereignis



$$P(T > t) = P[\text{keine Ereignisse im Intervall } (0, t)] = P(X = 0) = p_X(0)$$

$$P(T > t) = \frac{(\lambda \cdot t)^0}{0!} \cdot e^{-\lambda \cdot t} = e^{-\lambda \cdot t}$$

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t} \quad \text{Das ist die Verteilungsfunktion für Exp}(\lambda)!$$

$$\Rightarrow T \sim \text{Exp}(\lambda)$$

Die Wartezeit für den Poisson-Prozess ist exponentiell verteilt.

16

Die Normalverteilung

- die wichtigste, am häufigsten vorkommende Verteilung
- Glockenkure ("bell curve"), auch **Gaußverteilung** genannt
- zentraler Grenzwertsatz → viele Zufallsvariablen sind (ungefähr) normalverteilt
- Beispiele: alle möglichen Messfehler, Anzahl weißer Blutkörperchen per ml usw.

Kurzbezeichnung: $X \sim N(\mu, \sigma)$ **Achtung!:** manchmal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Ereignisraum: $\Omega_X = (-\infty, \infty)$

Dichtefunktion: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < +\infty$

Zwei Parameter:

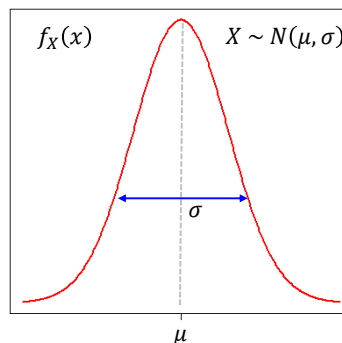
- μ : **Erwartungswert** ; Symmetrizentrum,
- σ : **Standardabweichung** ; charakterisiert Breite von $f_X(x)$

www.matstat.org

17

Die Normalverteilung

Dichtefunktion: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < +\infty$



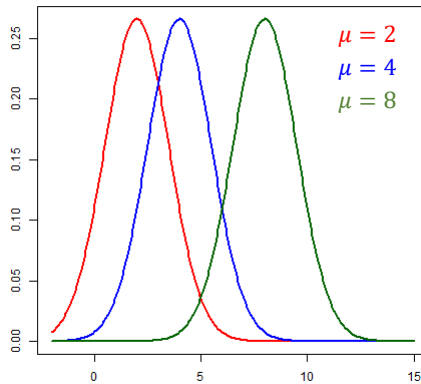
Normierung: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1 \quad (\text{hier ohne Beweis})$

www.matstat.org

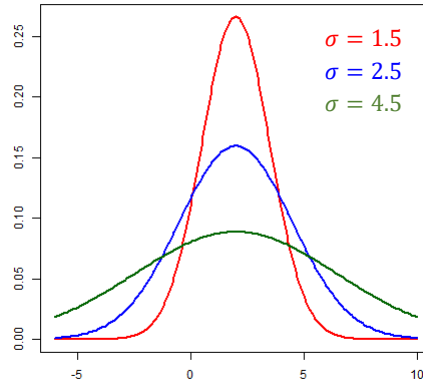
18

Die Normalverteilung

Verschiedene μ (Erwartungswerte)



Verschiedene σ (Standardabw.)



www.matstat.org

19

Die Normalverteilung

Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \dots = \mu$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \dots = \sigma^2$$

$$D(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$E(X) = \mu$$

$$V(X) = \sigma^2$$

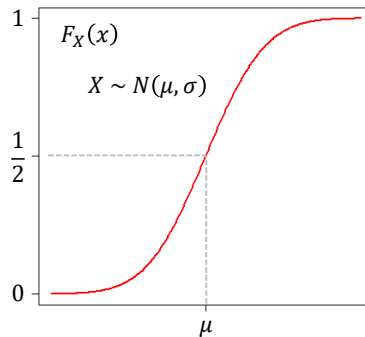
$$D(X) = \sigma$$

www.matstat.org

20

Die Normalverteilung

Verteilungsfunktion: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$



- kein analytischer Ausdruck möglich
- tabelliert nur für $N(0,1)$

Verteilungsfunktion für $N(0,1)$: Spezialfall $\mu = 0$; $\sigma = 1$ "Standard-Normalverteilung"

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

- wird $\Phi(x)$ genannt
- tabelliert für (ausreichend) viele x

21

Verteilungsfunktion für $N(0,1)$: $\Phi(x)$

$$\mu = 0$$

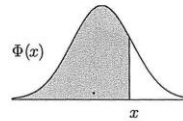
$$\sigma = 1$$

Blom s. 397

Tabell 1. Standard normalfördelning

$\Phi(x) = P(X \leq x)$, där $X \in N(0,1)$.

För negativa x , utnyttja att $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$



x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767

tabelliert
von 0 .. 4.0
in 0.01-
Schritten

22

Die Normalverteilung

Wir haben nur eine Tabelle für den Spezialfall $N(0, 1)$. Welchen Nutzen hat diese Tabelle?

Sei $X \sim N(\mu, \sigma)$ $\Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$ allgemeine Verteilungsfunktion (alle μ und σ)

Substitution: $z = \frac{t-\mu}{\sigma}$ (z ist die standardisierte Zufallsvariable !)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\sigma} \rightarrow dt = \sigma \cdot dz$$

$$\Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}}_{\text{Dichtefunktion für } N(0, 1)} dz = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

F_X für $N(0, 1)$!!

Dichtefunktion für $N(0, 1)$

www.matstat.org

23

Die Normalverteilung

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Die Verteilungsfunktionen für die allgemeine Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$ kann mit Hilfe der Verteilungsfunktionen für die standardisierte Normalverteilung $N(0, 1)$ berechnet werden.

Wenn $X \sim N(\mu, \sigma)$, dann ist $F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, wobei Φ die Verteilungsfunktion für die standardisierte Normalverteilung, $N(0, 1)$, ist.

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$X \sim N(\mu, \sigma)$

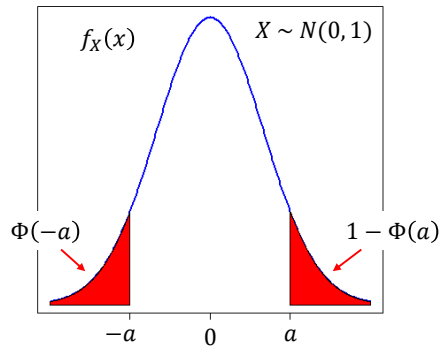
Mit Hilfe dieser Formel und einer Tabelle für Φ kann man die Verteilungsfunktion für **alle Werte von x , μ und σ berechnen** (mit einer gewissen Präzision).

24

Die Normalverteilung

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Tabellen für Φ gibt es jedoch nur für positive Argumente. Mit Hilfe der Symmetrie von $N(0, 1)$ gelingt jedoch auch die Berechnung für negative Argumente. Man nutzt aus dass $N(0, 1)$ symmetrisch um Null ist:



Die rot markierten Flächen haben die gleiche Größe (Symmetrie). Damit folgt:

$$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$$

Die Berechnung von Φ für negative Argumente ist damit möglich.

www.matstat.org

25

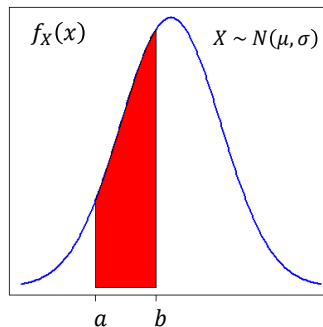
Die Normalverteilung

Wahrscheinlichkeit, dass eine normalverteilte Zufallsvariable zwischen den reellen Zahlen a und b landet:

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

gilt allgemein

gilt nur für Normalverteilung



26

Die Normalverteilung

Beispiele: Berechnung von F_X für beliebige μ und σ

a) $X \sim N(\mu, \sigma)$ $X \sim N(3, 2)$ suche: $P(X \leq 1)$?

Tabelle

$$P(X \leq 1) = F_X(1) = \Phi\left(\frac{1-3}{2}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = \underline{\underline{0.1587}}$$

b) $X \sim N(\mu, \sigma)$ $X \sim N(2, 1)$ suche: $P(1 \leq X \leq 3)$?

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 3) &= F_X(3) - F_X(1) = \Phi\left(\frac{3-2}{1}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{1}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] = 2 \cdot \Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 = \underline{\underline{0.683}} \end{aligned}$$

Teil b) hat nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, dass X zwischen $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$ liegt. Diese Wahrscheinlichkeit ist also $\approx 68\%$. Siehe nächste Seite $\rightarrow$

www.matstat.org

27

Die Normalverteilung

Wahrscheinlichkeit dass X zwischen $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$ liegt:

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) &= F_X(\mu + \sigma) - F_X(\mu - \sigma) \\ &= \Phi\left(\frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) = \dots \approx \underline{\underline{68\%}} \end{aligned}$$

Wenn $X \sim N(\mu, \sigma)$, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass X zwischen $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$ liegt ungefähr 68%.

Mit derselben Methode erhält man:

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95\%$$

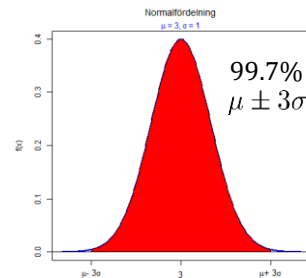
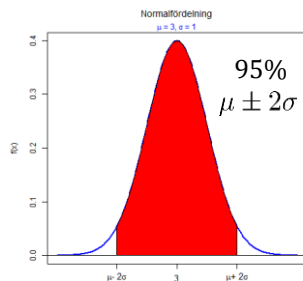
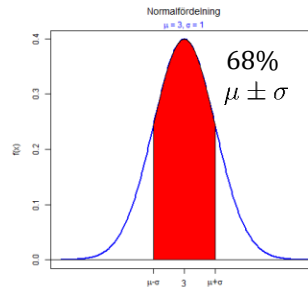
$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99.7\%$$

www.matstat.org

28

Normalverteilung

$$\begin{aligned}
 P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) &\approx 68\% \\
 P(\mu - 2 \cdot \sigma < X \leq \mu + 2 \cdot \sigma) &\approx 95\% \\
 P(\mu - 3 \cdot \sigma < X \leq \mu + 3 \cdot \sigma) &\approx 99.7\%
 \end{aligned}$$



29

Die Normalverteilung

Beispiel: Eine Zufallsvariable X ist normalverteilt mit $\mu = 3$ und Varianz 4.

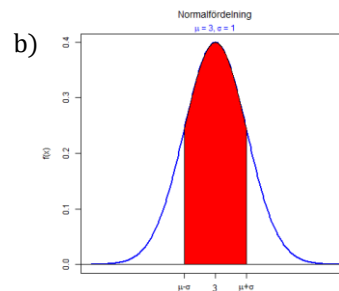
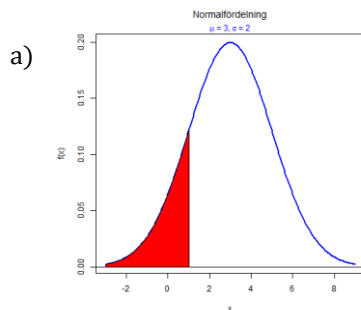
- a) Berechne die Wahrscheinlichkeit dass X kleiner als 1 ist. Skizziere das Resultat.

$X \sim N(3, 2)$ 2. Parameter ist Standardabweichung!

$$P(X \leq 1) = F_X(1) = \Phi\left(\frac{1-3}{2}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = \underline{\underline{0.1587}}$$

- b) Berechne die Wahrscheinlichkeit dass X zwischen 1 und 5 liegt. Skizziere!

$$P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = P(1 < X \leq 5) \approx 68\%$$



www.matstat.org

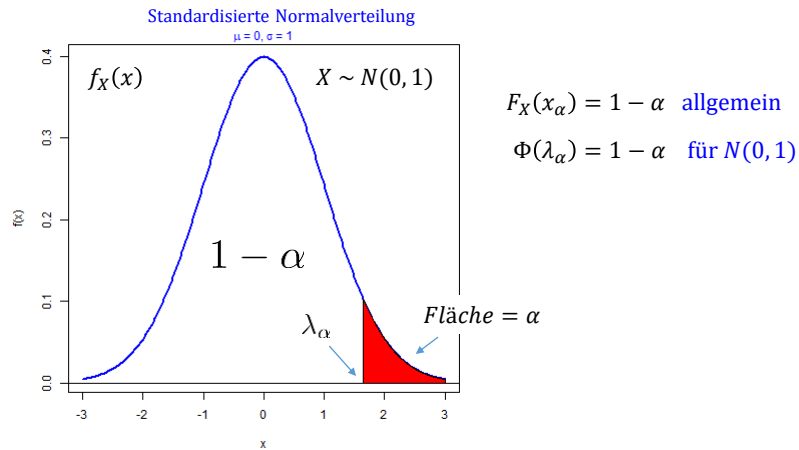
30

Die Normalverteilung

Quantiler für die standardisierte Normalverteilung, $N(0, 1)$

Definition für Quantile x_α : $F_X(x_\alpha) = 1 - \alpha$

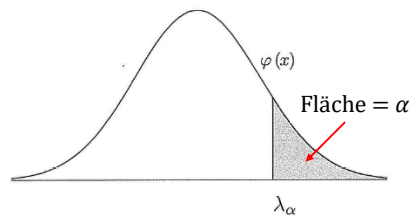
Die Quantile für $N(0,1)$ werden oft als λ_α bezeichnet.



31

Die Normalverteilung

Die Quantile für $N(0, 1)$ sind tabelliert:



Quantile für $N(0,1)$

α	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10
λ_α	3.29	3.09	2.58	2.33	1.96	1.64	1.28

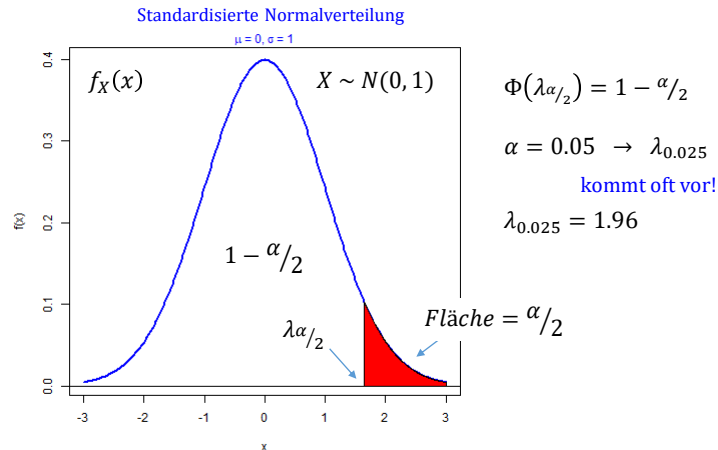
www.matstat.org

32

Die Normalverteilung

Die Quantile für die standardisierte Normalverteilung, $N(0, 1)$

Oft wird auch $\alpha/2$ als Argument gebraucht, d.h. wir ersetzen α mit $\alpha/2$:

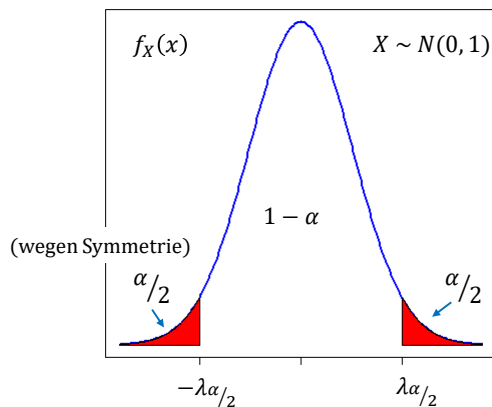


33

Die Normalverteilung

Wahrsch., dass eine $N(0, 1)$ - Variable zwischen $-\lambda_{\alpha/2}$ und $+\lambda_{\alpha/2}$ landet:

$$\begin{aligned} P(-\lambda_{\alpha/2} < X \leq \lambda_{\alpha/2}) &= \Phi(\lambda_{\alpha/2}) - \Phi(-\lambda_{\alpha/2}) = \Phi(\lambda_{\alpha/2}) - [1 - \Phi(\lambda_{\alpha/2})] \\ &= 2 \cdot \Phi(\lambda_{\alpha/2}) - 1 = 2 \cdot \left[1 - \frac{\alpha}{2}\right] - 1 = \underline{\underline{1 - \alpha}} \end{aligned}$$



$$P(-\lambda_{\alpha/2} < X \leq \lambda_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Dieses wichtige Resultat wird später für Intervallschätzungen gebraucht!

www.matstat.org

34

Lineartransformation von normalverteilten Zufallsvariablen

$$Y = a \cdot X + b \quad \text{Lineartransformation}$$

Wiederholung Lineartransformation (siehe Vorlesung **F3**):

$$\left. \begin{aligned} E(a \cdot X + b) &= a \cdot E(X) + b = a \cdot \mu + b \\ V(a \cdot X + b) &= a^2 \cdot V(X) = a^2 \cdot \sigma^2 \\ D(a \cdot X + b) &= |a| \cdot D(X) = |a| \cdot \sigma \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \mu &= E(X) \\ \sigma^2 &= V(X) \\ \sigma &= D(X) \end{aligned}$$

Allgemein gilt dass $E(Y) = a \cdot \mu + b$ und $D(Y) = |a| \cdot \sigma$. Damit wird aber noch nichts über die **Verteilung** von Y ausgesagt. Für die Normalverteilung gilt eine **Besonderheit**: Wenn X normalverteilt ist, dann ist auch die linear transformierte Variable Y normalverteilt:

Wenn $X \sim N(\mu, \sigma)$
 und $Y = a \cdot X + b$ mit $a, b \in \mathcal{R}$
 dann gilt $Y \sim N(a \cdot \mu + b, |a| \cdot \sigma)$

www.matstat.org

35

Summe und Differenz von Zufallsvariablen

Erwartungswert und Varianz:

$$\begin{aligned} E(a \cdot X + b \cdot Y) &= a \cdot E(X) + b \cdot E(Y) \\ V(a \cdot X + b \cdot Y) &= a^2 \cdot V(X) + b^2 \cdot V(Y) + 2ab \cdot C(X, Y) \\ &= a^2 \cdot V(X) + b^2 \cdot V(Y) \quad \text{wenn } X, Y \text{ unabhängig } (C = 0) \end{aligned}$$

Kovarianz

Kovarianz: $C(X, Y) = E[(X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y)]$

Wenn $a = 1$ und $b = \pm 1$:

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) \quad \text{Nur wenn } X, Y \text{ unabhängig! also } C(X, Y) = 0$$

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y) \quad \text{Beachte das Plus in der Gleichung!} \\ (b = -1 \rightarrow b^2 = 1)$$

www.matstat.org

36

Summe und Differenz von Zufallsvariablen

Für mehrere Summanden gilt:

$$E\left(\sum X_i\right) = \sum E(X_i) \quad \text{Diese Gleichung für den Erwartungswert gilt allgemein.}$$

$$V\left(\sum X_i\right) = \sum V(X_i) \quad \text{Diese Gleichung für Varianzen gilt nur wenn alle } X_i \text{ paarweise unabhängig sind!}$$

- Der Erwartungswert einer Summe ist also gleich der Summe der Erwartungswerte.
- Wenn alle Zufallsvariablen paarweise unabhängig sind, dann ist auch die Varianz einer Summe gleich der Summe der Varianzen.

www.matstat.org

37

Summe/Differenz zweier unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} \text{Sei } X &\sim N(\mu_x, \sigma_x) \rightarrow E(X) = \mu_x \quad V(X) = \sigma_x^2 \\ Y &\sim N(\mu_y, \sigma_y) \rightarrow E(Y) = \mu_y \quad V(Y) = \sigma_y^2 \end{aligned} \quad X, Y \text{ unabhängig}$$

$$E(X + Y) = \mu_x + \mu_y \quad \text{och} \quad E(X - Y) = \mu_x - \mu_y$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \quad D(X + Y) = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \quad D(X - Y) = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \quad \text{immer "plus!"}$$

Summen / Differenzen **zweier unabhängiger** normalverteilter Zufallsvariablen sind ebenfalls normalverteilt, mit Erwartungswert $\mu_x \pm \mu_y$ und Standardabweichung $\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$

$$X \pm Y \sim N\left(\mu_x \pm \mu_y, \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\right)$$

www.matstat.org

38

Summe mehrerer unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen

Sei $X_i \sim N(\mu, \sigma)$ $i = 1, 2, \dots, n$

- n **unabhängige** normalverteilte Zufallsvariablen mit gleichen Erwartungswerten und gleichen Varianzen

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) &= \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n \mu = n \cdot \mu \\ V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) &= \sum_{i=1}^n V(X_i) = \sum_{i=1}^n \sigma^2 = n \cdot \sigma^2 \quad \leftarrow \text{Die } X_i \text{ müssen unabhängig sein!} \\ D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) &= \sqrt{n} \cdot \sigma \end{aligned}$$

www.matstat.org

39

Summe mehrerer unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen

Sei $X_i \sim N(\mu, \sigma)$ $i = 1, 2, \dots, n$

- n **unabhängige** normalverteilte Zufallsvariablen mit gleichen Erwartungswerten und gleichen Varianzen

Summen und Differenzen mehrerer **unabhängiger** normalverteilter Zufallsvariablen mit gleichen Erwartungswerten und gleichen Varianzen sind **auch normalverteilt**; Erwartungswerte und Varianzen werden addiert:

$$\begin{aligned} X_i &\sim N(\mu, \sigma) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{unabhängig} \\ \Rightarrow \sum_i X_i &\sim N(n \cdot \mu, \sqrt{n} \cdot \sigma) \end{aligned}$$

www.matstat.org

40

Mittelwert mehrerer unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen

$$X_i \sim N(\mu, \sigma) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \begin{array}{l} n \text{ unabhängige normalverteilte} \\ \text{Zufallsvariablen, gleiche } \mu, \sigma \end{array}$$

$$\text{Sei } S = \sum_{i=1}^n X_i \implies E(S) = n \cdot \mu \text{ och } V(S) = n \cdot \sigma^2 \quad (\text{siehe oben})$$

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \cdot S\right) = \frac{1}{n} \cdot E(S) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$$

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n} \cdot S\right) = \frac{1}{n^2} \cdot V(S) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$D(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

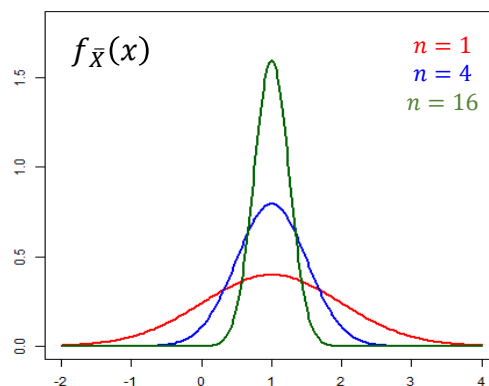
Die Standardabweichung für $\bar{X}$ ist kleiner als für ein einzelnes X_i - wichtig für Messungen !

www.matstat.org

41

Mehr Messwerte (n) $\rightarrow$ schmalere Verteilung für $\bar{X}_n$

Dichtefunktion für den Durchschnitt ($\bar{X}$)



$$X_i \sim N(\mu, \sigma)$$



$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

SEM = "Standard Error of the Mean"

www.matstat.org

42

Beispiel: Verteilung für X_i

Beispiel: Ein Messfehler ist normalverteilt mit $N(0, 10)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Fehler bei einer aktuellen Messung in den Grenzen $(-3, 3)$ hält?

$$\begin{aligned} P(-3 < X \leq 3) &= F_x(3) - F_x(-3) \\ &= \Phi\left(\frac{3-0}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-3-0}{10}\right) \\ &= \Phi(0.3) - \Phi(-0.3) = 2 \cdot \Phi(0.3) - 1 \approx 0.236 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeiten ist ca. 24% dass sich der Messfehler in den Grenzen -3 und 3 hält.

www.matstat.org

43

Beispiel: Verteilung für $\bar{X}$

Beispiel: Ein Messfehler ist normalverteilt mit $N(0, 10)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich der **Mittelwert des Fehlers** bei 25 Messungen in den Grenzen $(-3, 3)$ hält?

$$X \sim N(0, 10) \quad \bar{X} \sim N\left(0, \frac{10}{\sqrt{25}}\right) \sim N(0, 2)$$

$$\begin{aligned} P(-3 < X \leq 3) &= F_x(3) - F_x(-3) \\ &= \Phi\left(\frac{3-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-3-0}{2}\right) \\ &= \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) = 2 \cdot \Phi(1.5) - 1 \approx 0.866 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit ist 87% dass sich der **Mittelwert des Fehlers** in den Grenzen -3 und 3 hält. Viel besser!

www.matstat.org

44

Der zentrale Grenzwertsatz (ZGS) (Central Limit Theorem, CLT)

Wir haben gesehen: Summen/Mittelwerte von normalverteilten Zufallsvariablen sind ebenfalls normalverteilt.

ZGS: Auch Summen/Mittelwerte von beliebig verteilten Zufallsvariablen X_i sind normalverteilt, wenn diese X_i

- alle die gleiche Verteilung haben
- unabhängig sind
- viele sind (Limit $\rightarrow \infty$)

$$X_i \sim \text{i.i.d.}(\mu, \sigma) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \mu = E(X) \quad \sigma = D(X)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{AsN}(n \cdot \mu, \sqrt{n} \cdot \sigma) \quad \text{AsN bedeutet "asymptotisch normalverteilt", nur } N \text{ ist auch ok.}$$

$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{AsN}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

www.matstat.org

45

Der zentrale Grenzwertsatz (ZGS) (Central Limit Theorem, CLT)

$$X_i \sim \text{i.i.d.}(\mu, \sigma) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \mu = E(X) \quad \sigma = D(X)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{AsN}(n \cdot \mu, \sqrt{n} \cdot \sigma)$$

$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{AsN}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

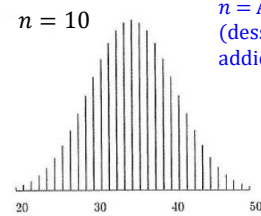
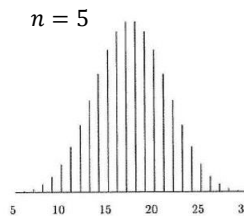
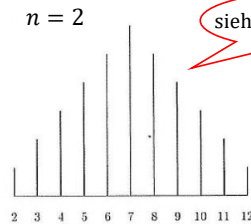
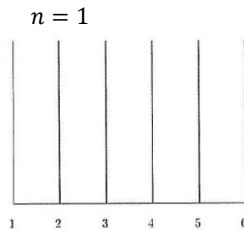
Summen und Mittelwerte der Zufallsvariablen X_i sind ungefähr normalverteilt, ungeachtet der Art der Verteilung für die X_i , wenn nur die Anzahl der Komponenten groß genug ist. Darüberhinaus gilt der ZGS ungefähr selbst wenn die X_i nicht exakt die gleiche Verteilung haben oder schwach abhängig sind!

www.matstat.org

46

Der zentrale Grenzwertsatz (ZGS)

Beispiel: mehrere (n) Würfel, Verteilung für die Summe der Augenzahlen



n = Anzahl der Würfel
(dessen Augenzahlen
addiert werden)

www.matstat.org

Je größer n wird, desto mehr ähnelt die Verteilung der Summe der
Normalverteilung.

47

Verteilung des Mittelwertes und dessen Standardisierung

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad X_i \sim N \text{ oder ZGS} \Rightarrow \bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Zur Erinnerung: Eine Zufallsvariable wird standardisiert indem man dessen Mittelwert subtrahiert und dann durch dessen Standardabweichung teilt. Die resultierende Zufallsvariable hat dann den Erwartungswert 0 und die Standardabweichung 1.



$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Diese Variable ist $N(0,1)$ -verteilt
("standard-normalverteilt").

www.matstat.org

48

Summe und Differenz von Mittelwerten

- Wir haben gesehen, dass der Mittelwert mehrerer normalverteilter Zufallsvariablen (mit gleichen Erwartungswerten μ und mit gleichen Standardabweichungen σ) auch normalverteilt ist.
- Darüberhinaus ist der Mittelwert von beliebig verteilten Zufallsvariablen (mit gleichen Erwartungswerten μ und mit gleichen Standardabweichungen σ) ebenfalls (ungefähr) normalverteilt, wenn nur die Anzahl der Komponenten groß genug ist (ZGS).

$$X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X) \text{ oder ZGS} \implies \bar{X} \sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X}{\sqrt{n_X}}\right)$$

$$Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y) \text{ oder ZGS} \implies \bar{Y} \sim N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n_Y}}\right)$$

ZGS = Zentraler Grenzwertsatz

Aufgrund der Regeln für Summen normalverteilter Zufallsvariablen folgt:

$$\bar{X} + \bar{Y} \sim N\left(\mu_X + \mu_Y, \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right)$$

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right)$$

49

Summe und Differenz von Mittelwerten

Beispiel: Die unabhängigen Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien beide $N(1, 2)$.

Gib die Verteilung für den Durchschnitt $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$ an!

$$E(\bar{X}) = E\left[\frac{X_1 + X_2}{2}\right] = \frac{1}{2} \cdot [E(X_1) + E(X_2)] = \frac{1}{2} \cdot [1 + 1] = 1$$

$$V(\bar{X}) = V\left[\frac{X_1 + X_2}{2}\right] = \frac{1}{4} \cdot [V(X_1) + V(X_2)] = \frac{1}{4} \cdot [2 + 2] = 1$$

$$D(\bar{X}) = \sqrt{1}$$

$$\implies \bar{X} \sim N(1, 1)$$

Dies stimmt mit der allgemeinen Formel überein (für $n = 2$):

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

www.matstat.org

50

Zusammenfassung: Verteilung von Summen und Mittelwerten

	$X_i \sim N(\mu, \sigma)$	X_i beliebig verteilt mit μ, σ
$Y = \sum_{i=1}^n X_i$	$Y \sim N(n \cdot \mu, \sqrt{n} \cdot \sigma) \quad \forall n$	$Y \sim N(n \cdot \mu, \sqrt{n} \cdot \sigma) \quad n \rightarrow \infty$
$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$	$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \forall n$	$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad n \rightarrow \infty$
	gilt exakt	gilt asymptotisch

uwe.menzel@matstat.org

51

Summe und Differenz N -verteilter Zufallsvariablen

Beispiel: Bauelemente haben eine ungefähr normalverteilte Länge: $N(25, \sqrt{0.4})$. Man legt 20 zufällig ausgewählte Bauelemente ohne Fugen zusammen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass deren Gesamtlänge 505 cm übersteigt?

$$X_i \sim N(25, \sqrt{0.4}) \quad Y = \sum_{i=1}^{20} X_i \quad \text{gesucht: } P(Y > 505)$$

$$Y \sim N(20 \cdot 25, \sqrt{20} \cdot \sqrt{0.4})$$

$$Y \sim N(500, \sqrt{8})$$

$$\begin{aligned} P(Y > 505) &= 1 - P(Y \leq 505) = 1 - F_Y(505) = 1 - \Phi\left(\frac{505 - 500}{\sqrt{8}}\right) \\ &= 1 - \Phi(1.77) = 1 - 0.9616 = \underline{\underline{0.0384}} \end{aligned}$$

www.matstat.org

52

Beispiel, Fortsetzung: Man legt zwei Reihen mit je 40 Bauelementen aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Unterschied zwischen den Längen beider Reihen 10 cm übersteigt?

$$X_i \sim N(25, \sqrt{0.4}) \quad \text{Reihe 1: } R_1 \quad \text{Reihe 2: } R_2$$

$$R_1 = \sum_{i=1}^{40} X_i \implies R_1 \sim N\left(40 \cdot 25, \sqrt{40} \cdot \sqrt{0.4}\right) \quad \text{d.h.} \quad R_1 \sim N(1000, 4)$$

$$\text{Das gleiche für Reihe 2 ...} \quad R_2 \sim N(1000, 4)$$

$$\implies R_1 - R_2 \sim N\left(0, \sqrt{32}\right)$$

Gesucht: $P(|R_1 - R_2| > 10)$ **Beachte das Absolutzeichen !**

$$\begin{aligned} P(|R_1 - R_2| > 10) &= 1 - P(|R_1 - R_2| \leq 10) = 1 - P(-10 < R_1 - R_2 \leq 10) \\ &= 1 - [F_{R_1 - R_2}(10) - F_{R_1 - R_2}(-10)] \\ &= 1 - \left[\Phi\left(\frac{10 - 0}{\sqrt{32}}\right) - \Phi\left(\frac{-10 - 0}{\sqrt{32}}\right) \right] \\ &= 1 + \Phi(-1.77) - \Phi(1.77) = 1 + 1 - \Phi(1.77) - \Phi(1.77) \\ &= 2 - 2 \cdot \Phi(1.77) = 2 - 2 \cdot 0.9616 = \underline{\underline{0.0768}} \end{aligned}$$

www.matstat.org

53

Mittelwert von N-verteilten Zufallsvariablen

Beispiel: Bei einer Messung kann angenommen werden, dass die erhaltenen Werte normalverteilt mit Erwartungswert 28.0 und Standardabweichung 0.25 sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass ein Messwert zwischen 27.5 und 28.5 liegt?

$$X_i \sim N(28, 0.25)$$

$$\begin{aligned} P(27.5 < X_i \leq 28.5) &= F_{X_i}(28.5) - F_{X_i}(27.5) = \Phi\left(\frac{28.5 - 28.0}{0.25}\right) - \Phi\left(\frac{27.5 - 28.0}{0.25}\right) \\ &= \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - [1 - \Phi(2)] = 2 \cdot \Phi(2) - 1 \\ &= \underline{\underline{0.954}} \end{aligned}$$

Beispiel, Fortsetzung: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass der arithmetische Mittelwert von vier unabhängigen Messwerten im selben Intervall liegt?

$$\bar{X}_4 \sim N(28, 0.125)$$

$$\begin{aligned} P(27.5 < \bar{X}_4 \leq 28.5) &= F_{\bar{X}_4}(28.5) - F_{\bar{X}_4}(27.5) = \Phi\left(\frac{28.5 - 28.0}{0.125}\right) - \Phi\left(\frac{27.5 - 28.0}{0.125}\right) \\ &= \Phi(4) - \Phi(-4) = \Phi(4) - [1 - \Phi(4)] = 2 \cdot \Phi(4) - 1 \\ &= \underline{\underline{0.99994}} \end{aligned}$$

www.matstat.org

54

Normalverteilung

Beispiel: Eine Zufallsvariable X sei standard-normalverteilt. Berechne:

$$X \sim N(0, 1)$$

a) $P(X \leq 1.82)?$

kontinuierlich!

Tabelle!

$$P(X \leq 1.82) = P(X < 1.82) = F_X(1.82) = \Phi(1.82) = \underline{0.9656}$$

b) $P(X \leq -0.35) = \Phi(-0.35) = 1 - \Phi(0.35) = 1 - 0.6368 = \underline{0.3632}$

c) $P(-1.2 < X \leq 0.5) = \Phi(0.5) - \Phi(-1.2) = \Phi(0.5) - [1 - \Phi(1.2)]$
 $= \Phi(0.5) - 1 + \Phi(1.2) = 0.6915 - 1 + 0.8849 = \underline{0.5764}$

d) $P(X > a) = 0.05$ Suche: a

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(a) = 1 - \Phi(a) = 0.05$$

$$\rightarrow \Phi(a) = 0.95 \rightarrow \underline{a = 1.64} \quad (\text{Tabelle})$$

e) $P(|X| < a) = 0.95$ Suche: a

$$P(|X| < a) = P(-a < X \leq +a) = \Phi(a) - \Phi(-a) = \Phi(a) - [1 - \Phi(a)]$$

$$= 2 \cdot \Phi(a) - 1 = 0.95 \rightarrow \Phi(a) = 0.975 \rightarrow \underline{a = 1.96 = \lambda_{0.025}}$$

55

Normalverteilung

Beispiel: Eine Zufallsvariable X sei standard-normalverteilt. Für eine andere Zufallsvariable Y gilt: $Y = 3 \cdot X + 2$. Berechne Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung für die Zufallsvariable Y !

$$E(X) = 0 ; \quad V(X) = 1 \quad \text{gegeben}$$

Lösung:

$$E(Y) = E(3 \cdot X + 2) = 3 \cdot E(X) + 2 = 2$$

$$V(Y) = V(3 \cdot X + 2) = 3^2 \cdot V(X) = 9$$

$$D(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{9} = 3$$

www.matstat.org

56

Normalverteilung

Beispiel: Eine Zufallsvariable X sei normalverteilt mit $X \sim N(5, 2)$
Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

a) $P(X \leq 6)$? $P(X \leq 6) = F_X(6) = \Phi\left(\frac{6-5}{2}\right) = \Phi(0.5) = 0.6915$

b) $P(1.8 < X < 7.2)$?

$$\begin{aligned} P(1.8 < X < 7.2) &= P(1.8 < X \leq 7.2) = F_X(7.2) - F_X(1.8) \\ &= \Phi\left(\frac{7.2-5}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1.8-5}{2}\right) = \Phi(1.1) - \Phi(-1.6) = \Phi(1.1) - [1 - \Phi(1.6)] \\ &= \Phi(1.1) - 1 + \Phi(1.6) = 0.8643 - 1 + 0.9452 = 0.8095 \end{aligned}$$

c) $P(X \leq a) = 0.05$ Suche: a

$$P(X \leq a) = F_X(a) = \Phi\left(\frac{a-5}{2}\right) = 0.05 \quad \text{Wert 0.05 nicht in der Tabelle} \rightarrow \text{benutze } \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{5-a}{2}\right) &= 0.95 \quad \text{Tabelle} \rightarrow \frac{5-a}{2} = 1.64 \quad \text{für att } \Phi(1.64) = 0.95 \\ &\rightarrow a = 5 - 2 \cdot 1.64 = 1.72 \end{aligned}$$